Corrigé CT MECA des Solides L2 - Physique - session 2 2013

Pb 1 : Mvt de 2 disques en contact

1) $\cdot \vec{V}_{(C_2 \in D_2 / R)} = \vec{V}_{(C_1 \in T / R)} + \vec{C_2C_1} \wedge \vec{\Omega}_{T/R} = -(r_2+r_1)\vec{e_\rho} \wedge \dot{\theta}\vec{e_3} = \boxed{(r_1+r_2)\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$

avec $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_3})$ = b.o.n.d et $\vec{e_\rho}$ porté par $\vec{C_1C_2}$

$\cdot \vec{V}_{(I_2 \in D_2 / R)} = \vec{V}_{(C_2 \in D_2 / R)} + \vec{I_2C_2} \wedge \vec{\Omega}_{D_2/R} = \boxed{\left[(r_1+r_2)\dot{\theta} - r_2\dot{\phi}_2\right]\vec{e_\theta}}$

2) $\vec{V}_g = \vec{V}_{(I_2 \in D_2 / R)} - \vec{V}_{(I_1 \in D_1 / R)}$ avec $\vec{V}_{(I_1 \in D_1 / R)} = r_1\dot{\phi}_1\vec{e_\theta}$

$\rightarrow \boxed{\vec{V}_g = \left[(r_1+r_2)\dot{\theta} - r_2\dot{\phi}_2 - r_1\dot{\phi}_1\right]\vec{e_\theta}} \rightarrow$ CRSG : $\vec{V}_g = \vec{0}$

$\hookrightarrow \boxed{(r_1+r_2)\dot{\theta} = r_2\dot{\phi}_2 + r_1\dot{\phi}_1}$

3) D_1 immobilisé $\rightarrow \dot{\phi}_1 = 0 \rightarrow \boxed{(r_1+r_2)\dot{\theta} = r_2\dot{\phi}_2}$

4) $I_{C_2 3}(D_2) = \sigma \int_0^{r_2}\int_0^{2\pi} \rho^2 \rho\, d\rho\, d\varphi = \boxed{m_2 \frac{r_2^2}{2}} \rightarrow \vec{L}_{C_2/R}(D_2) = I_{C_2 3}(D_2)\vec{\Omega}_{D_2/R}$

$\hookrightarrow \boxed{\vec{L}_{C_2/R}(D_2) = \frac{m_2 r_2^2}{2}\dot{\phi}_2\vec{e_3}}$

5) Koenig $\rightarrow \vec{L}_I(D_2) = \vec{L}^*(D_2) + \vec{IC_2} \wedge m_2\vec{V}_{C_2/R}$

avec $\vec{L}^*(D_2) = \vec{L}_{C_2}(D_2)$ d'où :

$\vec{L}_I(D_2) = m_2\frac{r_2^2}{2}\dot{\phi}_2\vec{e_3} + r_2\vec{e_\rho} \wedge (r_1+r_2)m_2\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\boxed{\vec{L}_I(D_2) = \frac{3}{2}m_2 r_2^2\dot{\phi}_2\vec{e_3} = \frac{3}{2}m_2 r_2(r_1+r_2)\dot{\theta}\vec{e_3}}$

6) TMC en I : $\left(\frac{d\vec{L}_I}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_I^{ex}(D_2) - \vec{V}_{I/R} \wedge m\vec{V}_{C_2/R}$

avec $\cdot \vec{\mathcal{M}}_I^{ex} = \vec{IC_2} \wedge m_2\vec{g} = r_2\vec{e_\rho} \wedge m_2 g\vec{e_x} = -m_2 g r_2 \sin\theta\,\vec{e_3}$

$\cdot \vec{V}_{I/R} \wedge \vec{V}_{C_2/R} = \vec{0}$ car I pt géométrique avec $\vec{V}_I \parallel \vec{V}_{C_2}$

$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}_I}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_I^{ex}$ devient : $\frac{3}{2}m_2 r_2(r_1+r_2)\ddot{\theta} = -m_2 g r_2 \sin\theta$

$\rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{g}{r_1+r_2}\sin\theta = 0}$

Pb 2 : Etude du mvt d'un anneau relié à 1 ressort

1. $\vec{v}_g = \vec{v}_{(I \in C/R)} - \vec{0} = \vec{v}_{C/R} + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R} = \dot{Y}\vec{e_y} + a\dot{\theta}\vec{e_y}$

2. $\rightarrow$ CRSG : $\boxed{\dot{Y} = -a\dot{\theta}}$

3. $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2_{C/R} + \frac{1}{2} I_{Cz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\dot{Y}^2 + \frac{1}{2} ma^2\dot{\theta}^2$

$\rightarrow \boxed{\mathcal{E}_k = m\dot{Y}^2}$

4. $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kY^2$

5. $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kY^2 + m\dot{Y}^2$ $\quad$ $\mathcal{E}_m = \underline{cte}$ car $\mathcal{P}^{nc} = 0$ et $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$

6. $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{Y} + \frac{k}{2m} Y = 0}$ $\quad$ soit $\ddot{Y} + \frac{\omega_0^2}{2} Y = 0$

7. $Y(t) = Y_m \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t + \phi\right)$ avec $\dot{Y}(0) = 0$ et $Y(0) = Y_0$

$\rightarrow \boxed{Y(t) = Y_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t\right)}$

8. $m\vec{a}_{C/R} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} \rightarrow \left|\begin{array}{l} m\ddot{y} = T - kY \quad \text{ou : } m\ddot{Y} = T - kY \\ 0 = -mg + N \end{array}\right.$

9. $v_g = 0 \rightarrow \boxed{\|\vec{T}\| \leq \mu \|\vec{N}\|}$ avec $m\ddot{Y} + kY = T$

$\ddot{Y} + \frac{k}{m} Y = \frac{T}{m}$

soit $\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = \frac{T}{m}$

d'où $\frac{\|\vec{T}\|}{m} = |\ddot{Y} + \omega_0^2 Y|$ et $\|\vec{T}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$ devient :

$$|\ddot{Y} + \omega_0^2 Y| \leq \mu g$$

$$\left|\left(-\frac{\omega_0^2}{2} + \omega_0^2\right) Y\right| \leq \mu g$$

$$\left|\frac{\omega_0^2}{2} Y\right| \leq \mu g$$

à $t = 0 : Y = Y_0 \rightarrow \frac{\omega_0^2}{2} Y_0 < \mu g \rightarrow \boxed{Y_0 < \frac{2}{\omega_0^2} \mu g = Y_1}$.